

Трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли

Р.М.Хакимов¹, Ф.Х.Хайдаров²,

Для ферромагнитной модели Поттса с тремя состояниями изучены трансляционно-инвариантные меры Гиббса на дереве Кэли порядка $k = 3$ и даны явные формулы для трансляционно-инвариантных мер Гиббса. Изучаются периодические меры Гиббса для антиферромагнитной модели Поттса с q —состояниями на дереве Кэли порядка k . При этом улучшены некоторые результаты из работы [10]: на некоторых инвариантах дано точное количество периодических мер Гиббса на дереве Кэли порядка $k \geq 3$ с периодом два.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, модель Поттса, мера Гиббса, трансляционно-инвариантные меры, периодические меры.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что каждой предельной мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы. Поэтому в теории мер Гиббса одной из важных задач является существование фазового перехода, т.е. когда физическая система меняет свое состояние при изменении температуры. Это происходит, когда мера Гиббса не единственна. При этом температура, при которой меняется состояние физической системы, обычно называется критической ([1]– [3]).

В [4] изучена ферромагнитная модель Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли второго порядка и показано существование критической температуры T_c такой, что при $T < T_c$ существуют три трансляционно-инвариантных и несчетное число не трансляционно-инвариантных мер Гиббса. В работе [5] обобщены результаты работы [4] для модели Поттса с конечным числом состояний на дереве Кэли произвольного (конечного) порядка.

В работе [6] показано, что на дереве Кэли трансляционно-инвариантная мера Гиббса антиферромагнитной модели Поттса с внешним полем единственна. Работа [7] посвящена модели Поттса со счетным числом состояний и с ненулевым внешним полем и доказано, что эта модель имеет единственную трансляционно-инвариантную меру Гиббса.

В работе [8] изучены периодические меры Гиббса и при некоторых условиях доказано, что все периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными; найдены условия, при которых модель Поттса с ненулевым внешним полем имеет периодические меры Гиббса. Работа [9] является продолжением работы [8]. Доказана существование не менее трех периодических мер Гиббса с периодом два на дереве Кэли порядка три и четыре для модели Поттса с тремя состояниями и с нулевым внешним полем. А в работе [10]

¹Институт математики, ул. Дурмон йули, 29, Ташкент, 100125, Узбекистан.

E-mail: rustam-7102@rambler.ru

²Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан.

E-mail: haydarov_imc@mail.ru

изучена модель Поттса с q -состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 3$ и на некоторых инвариантах показано существование периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса при некоторых условиях на параметры этой модели. Кроме того, указана нижняя граница количества существующих периодических мер Гиббса. В работе [11] дано полное описание трансляционно-инвариантных мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса с q -состояниями и показано, что их количество равно $2^q - 1$, а в работе [12] изучена задача крайности этих мер.

В этой работе мы дадим явные формулы для трансляционно-инвариантных мер Гиббса ферромагнитной модели Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k = 3$. Кроме того, докажем, что на некотором инварианте при некоторых условиях на параметры антиферромагнитной модели Поттса с q -состояниями с нулевым внешним полем на дереве Кэли порядка $k \geq 3$ существуют ровно две периодические (не трансляционно-инвариантные) меры Гиббса с периодом два и укажем точное количество существующих периодических мер Гиббса на объединении некоторых инвариантных множеств.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ

Дерево Кэли \mathfrak{Z}^k порядка $k \geq 1$ - бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребро. Пусть $\mathfrak{Z}^k = (V, L, i)$, где V — есть множество вершин \mathfrak{Z}^k , L — множество его ребер, и i — функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями вершины* и обозначается $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$ на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x, y) = \min \{d | \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ такой, что } \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}.$$

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим $W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}$,

$$V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}, \quad L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

Известно, что существует взаимнооднозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k , являющейся свободным произведением $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими a_1, a_2, \dots, a_{k+1} , соответственно.

Мы рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$, $q \geq 2$ и расположены на вершинах дерева. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Гамильтониан модели Поттса определяется как

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (2.1)$$

где $J \in \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle$ — ближайшие соседи и δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ в объеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x), x} \right\}, \quad (2.2)$$

где $\beta = 1/T$, $T > 0$ —температура, Z_n^{-1} нормирующий множитель и $\{h_x = (h_{1,x}, \dots, h_{q,x}) \in R^q, x \in V\}$ совокупность векторов и

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}.$$

Говорят, что вероятностное распределение (2.2) согласованное, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}).$$

Здесь $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$ есть объединение конфигураций. В этом случае, существует единственная мера μ на Φ^V такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n).$$

Такая мера называется расщепленной гиббсовской мерой, соответствующей гамильтониану (2.1) и векторзначной функции $h_x, x \in V$.

Следующее утверждение описывает условие на h_x , обеспечивающее согласованность $\mu_n(\sigma_n)$.

Теорема 1. [6] Вероятностное распределение $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$ в (2.2) является согласованным тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место следующее

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \quad (2.3)$$

где $F : h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in R^{q-1} \rightarrow F(h, \theta) = (F_1, \dots, F_{q-1}) \in R^{q-1}$ определяется как:

$$F_i = \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}} \right),$$

$\theta = \exp(J\beta)$, $S(x)$ — множество прямых потомков точки x и $h_x = (h_{1,x}, \dots, h_{q-1,x})$ с условием

$$h_{i,x} = \tilde{h}_{i,x} - \tilde{h}_{q,x}, \quad i = 1, \dots, q-1. \quad (2.4)$$

Пусть \hat{G}_k — подгруппа группы G_k .

Определение 1. Совокупность векторов $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется \hat{G}_k -периодической, если $h_{yx} = h_x$ для $\forall x \in G_k, y \in \hat{G}_k$.

G_k — периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

Определение 2. Мера μ называется \hat{G}_k -периодической, если она соответствует \hat{G}_k -периодической совокупности векторов h .

Следующая теорема характеризует периодические меры Гиббса.

Теорема 2. [8] Пусть K — нормальный делитель конечного индекса в G_k . Тогда для модели Поттса все K — периодические меры Гиббса являются либо $G_k^{(2)}$ — периодическими, либо трансляционно-инвариантными, где $G_k^{(2)} = \{x : |x| - \text{четная}\}$.

3. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА

Для любого $x \in V$ трансляционно-инвариантная мера Гиббса соответствует решению h_x из формулы (2.3) с $h_x = h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in R^{q-1}$. Тогда из уравнения (2.3) мы получим $h = kF(h, \theta)$ и обозначая $z_i = \exp(h_i)$, $i = 1, \dots, q-1$, последнее уравнение можем переписать как

$$z_i = \left(\frac{(\theta - 1)z_i + \sum_{j=1}^{q-1} z_j + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} z_j} \right)^k, \quad i = 1, \dots, q-1. \quad (3.1)$$

Из работы [11] известно, что любая трансляционно-инвариантная мера Поттса модели соответствует решению следующего уравнения

$$z = f_m(z) \equiv \left(\frac{(\theta + m - 1)z + q - m}{mz + q - m - 1 + \theta} \right)^k, \quad (3.2)$$

для некоторых $m = 1, \dots, q-1$.

Рассмотрим (3.2) при $k = 3$, $\theta > 1$ и обозначим $\sqrt[3]{z} = x$. Тогда

$$mx^4 - (\theta + m - 1)x^3 + (q - m - 1 + \theta)x - q + m = 0.$$

Заметим, что $x_0 = 1$ является решением этого уравнения. Разделив это уравнение на $(x - 1)$, получим

$$\varphi(x) = mx^3 - (\theta - 1)x^2 - (\theta - 1)x + q - m = 0. \quad (3.3)$$

Заметим, что последнее уравнение по теореме Декарта о количестве положительных корней многочлена имеет не более двух положительных решений. Кроме того, $\varphi(0) = q - m > 0$, $\varphi(+\infty) = +\infty$ и уравнение $\varphi'(x) = 0$ имеет единственное положительное решение:

$$x^*(\theta, m) = \frac{\theta - 1 + \sqrt{(\theta - 1)^2 + 3m(\theta - 1)}}{3m},$$

т.е. функция $\varphi(x)$ убывает при $x < x^*$ и возрастает при $x > x^*$. Следовательно, существует $\theta_{cr}(m, q)$ такое, что уравнение (3.3) не имеет решения при $\theta < \theta_{cr}(m, q)$, имеет одно решение при $\theta = \theta_{cr}(m, q)$ и имеет два решения при $\theta > \theta_{cr}(m, q)$, где $\theta_{cr}(m, q)$ есть решение уравнения $\varphi(x^*) = 0$.

Вообще говоря, в работе [11] даны формулы (3.17), (3.18) для вычисления $\theta_{cr}(m, q) = \theta_m$ и используя эти формулы при $k = 3$, имеем

$$\theta_{cr}(m, q) = \psi(x^{**}), \quad (3.4)$$

где

$$\psi(x) = \frac{mx^3 + q - m}{x^2 + x} + 1$$

и x^{**} есть решение уравнения $mx^4 + 2mx^3 - 2(q - m)x - (q - m) = 0$. Решим последнее уравнение стандартным методом Феррари из линейной алгебры. Тогда после громоздких вычислений будем иметь

$$x^{**} = \frac{\sqrt[4]{8\alpha_0^3} + \sqrt{(3 - 2\alpha_0)\sqrt{2\alpha_0} - 6 + \frac{4q}{m}}}{2\sqrt[4]{2\alpha_0}} - \frac{1}{2},$$

где

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt[3]{m(8m^2 - 12mq + 4q^2)} + m}{2m}.$$

Случай $q = 3$. В этом случае уравнение $\varphi'(x) = 0$ имеет единственное положительное решение:

$$x^*(\theta, 1) = \frac{\theta - 1 + \sqrt{\theta^2 + \theta - 2}}{3}$$

и θ_{cr} есть решение уравнения $\varphi(x^*) = 0$: $\theta_{cr} = \sqrt{9 + 6\sqrt{3}} - 2 \approx 2.403669476$.

Замечание 1. Это значение для θ_{cr} можно получить из формулы (3.4) при $q = 3, m = 1$.

Найдем решения уравнения (3.3) с помощью формулы Кардано. Для этого обозначим $x = y + (\theta - 1)/3$ и перепишем уравнение (3.3)

$$y^3 + py + r = 0, \quad (3.5)$$

где

$$p = -\frac{1}{3}(\theta^2 + \theta - 2), \quad r = \frac{1}{27}(-2(\theta - 1)^3 - 9(\theta - 1)^2 + 54).$$

Последнее уравнение имеет одно отрицательное решение

$$y = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

при $\theta < \theta_{cr}$, одно положительное решение

$$y^* = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{3} + \frac{1}{3} \sqrt{9 + 6\sqrt{3}}(1 - \sqrt{3}) \right) \approx 0.828740438$$

при $\theta = \theta_{cr}$ и решения вида

$$y_1 = \frac{2p}{3} \cos \frac{\alpha}{3}, \quad y_2 = \frac{2p}{3} \cos \frac{\alpha + 2\pi}{3}, \quad y_3 = \frac{2p}{3} \cos \frac{\alpha + 4\pi}{3}$$

при $\theta > \theta_{cr}$, где

$$\alpha = \arctan \left(\frac{2}{r} \sqrt{-\frac{r^2}{4} - \frac{p^3}{27}} \right), \quad r(\theta) \neq 0.$$

Можно увидеть, что $x_1 = y_1 + \frac{\theta-1}{3} < 0$, $x_2 = y_2 + \frac{\theta-1}{3} > 0$, $x_3 = y_3 + \frac{\theta-1}{3} > 0$ при $\theta > \theta_{cr}$. Кроме того,

$$x_4 = y^* + \frac{\theta-1}{3} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{3} + \frac{1}{3} \sqrt{9 + 6\sqrt{3}}(3 - \sqrt{3}) \right) \approx 1.296630263$$

при $\theta = \theta_{cr}$.

Далее, из работы [11] (Лемма 1) следует, что z_2^{-1} и z_3^{-1} являются решениями уравнения (3.2) при $m = 2, k = 3$. Из всего сказанного и в силу формулы (1.5) из той же работы получим следующее

Утверждение. Пусть $q = 3, k = 3, \theta > 1$. Тогда система уравнений (3.1) имеет

1. Единственное решение $(1, 1)$ при $\theta < \theta_{cr}$;
2. Три решения $(1, 1), (z_1, 1), (1, z_1)$ при $\theta = \theta_{cr}$;
3. Семь решений $(1, 1), (z_2, 1), (1, z_2), (z_3, 1), (1, z_3), (z_2, z_2), (z_3, z_3)$ при $\theta > \theta_{cr}$, где $z_1 = x_4^3, z_2 = x_2^3, z_3 = x_3^3$.

Замечание 2. 1. Утверждение 1 является частным случаем теоремы 1 из работы [11]. Здесь мы дали явные формулы для решений, соответствующих трансляционно-инвариантным мерам Гиббса в случае $k = 3$.

2. При $\theta = \theta_{cr}$ имеем $z_1 = z_2 = z_3$.

3. Заметим, что решения (z_2, z_2) и (z_3, z_3) , подобно работе [11], получены из решения вида $(1, 1, z)$ при $m = 1$.

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА

Рассмотрим случай $q \geq 3$, т.е. $\sigma : V \rightarrow \Phi = \{1, 2, 3, \dots, q\}$. В силу Теоремы 2 имеются только $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса, которые соответствуют совокупности векторов $h = \{h_x \in R^{q-1} : x \in G_k\}$ вида

$$h_x = \begin{cases} h, & \text{если } |x| - \text{четно,} \\ l, & \text{если } |x| - \text{нечетно.} \end{cases}$$

Здесь $h = (h_1, h_2, \dots, h_{q-1})$, $l = (l_1, l_2, \dots, l_{q-1})$. Тогда в силу (2.3) имеем:

$$\begin{cases} h_i = k \ln \frac{(\theta-1) \exp(l_i) + \sum_{j=1}^{q-1} \exp(l_j) + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} \exp(l_j) + \theta}, \\ l_i = k \ln \frac{(\theta-1) \exp(h_i) + \sum_{j=1}^{q-1} \exp(h_j) + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} \exp(h_j) + \theta}, \end{cases} \quad i = \overline{1, q-1}.$$

Введем следующие обозначения: $\exp(h_i) = x_i$, $\exp(l_i) = y_i$. Тогда последнюю систему уравнений при $i = \overline{1, q-1}$ можно переписать:

$$\begin{cases} x_i = \left(\frac{(\theta-1)y_i + \sum_{j=1}^{q-1} y_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} y_j + \theta} \right)^k, \\ y_i = \left(\frac{(\theta-1)x_i + \sum_{j=1}^{q-1} x_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} x_j + \theta} \right)^k. \end{cases} \quad (4.1)$$

Замечание 3. 1) При $q = 2$ модель Поттса совпадает с моделью Изинга, с которой можно ознакомиться в монографии [6].

2) В случае $k = 2$, $q = 3$ и $J < 0$ было доказано, что на инвариантном множестве $I = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in R^4 : x_1 = x_2, y_1 = y_2\}$ все $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными (см. [8]).

3) В случае $k \geq 1$, $q = 3$ и $J > 0$ было доказано, что все $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными (см. [8]).

Из работы [10] известно, что множество

$$I_m = \{z = (u, v) \in R^{q-1} \times R^{q-1} : x_i = x, y_i = y, i = \overline{1, m}, x_i = y_i = 1, i = \overline{m+1, q-1}\};$$

т.е. $u = (\underbrace{x, x, \dots, x}_m, 1, 1, \dots, 1)$, $v = (\underbrace{y, y, \dots, y}_m, 1, 1, \dots, 1)$, является инвариантным относительно отображения $W : R^{q-1} \times R^{q-1} \rightarrow R^{q-1} \times R^{q-1}$, определяемое следующим образом:

$$\begin{cases} x'_i = \left(\frac{(\theta-1)y_i + \sum_{j=1}^{q-1} y_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} y_j + \theta} \right)^k \\ y'_i = \left(\frac{(\theta-1)x_i + \sum_{j=1}^{q-1} x_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} x_j + \theta} \right)^k. \end{cases}$$

В случае I_m система уравнений (4.1) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x = \left(\frac{\theta y + (m-1)y + (q-m)}{\theta + m y + (q-m-1)} \right)^k \\ y = \left(\frac{\theta x + (m-1)x + (q-m)}{\theta + m x + (q-m-1)} \right)^k \end{cases} \quad (4.2)$$

или

$$\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(x), \end{cases} \text{ где } f(x) = \left(\frac{\theta x + (m-1)x + (q-m)}{\theta + m x + (q-m-1)} \right)^k, \quad (4.3)$$

Замечание 4. 1.(см. [10]) Пусть $\pi \in S_{q-1}$ перестановка. Определим действие π на вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_{q-1})$ как $\pi(x) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(q-1)})$. Тогда $\pi(A) = \{(\pi x, \pi y) : (x, y) \in A\}$, где $A = I_m$, также является инвариантным множеством относительно W , но соответствующая система уравнений в случае I_m совпадает с (4.2), поэтому не нарушая общности, можно рассмотреть I_m .

2. В работе [10] было доказано Утверждение 1, что при $k \geq 3$, $3 \leq q < k+1$, $0 < \theta < \bar{\theta}_{cr} = \frac{k-q+1}{k+1} < 1$ система уравнений (4.1) на инвариантном множестве I_m имеет не менее трех решений $x_0 < x_1 = 1 < x_2$, при $\theta = \bar{\theta}_{cr}$ имеет не менее одного решения $x_1 = 1$ и при $\theta > \bar{\theta}_{cr}$ имеет только одно решение $x_1 = 1$.

В следующей теореме мы докажем, что система уравнений (4.1) на I_m , для некоторого m , при этих условиях имеет ровно три решения $x_0 < x_1 = 1 < x_2$ при $0 < \theta < \bar{\theta}_{cr}$.

Теорема 3. Пусть $\bar{\theta}_{cr} = \frac{k-q+1}{k+1}$, $k \geq 3$, $q \geq 3$, $J < 0$. Тогда для модели Поттса при $0 < \theta < \bar{\theta}_{cr}$ существуют ровно три $G_k^{(2)}$ – периодические меры Гиббса, соответствующие совокупности из множества I_m для некоторого m . При этом одна из них является трансляционно-инвариантной, а другие две $G_k^{(2)}$ – периодическими (не трансляционно-инвариантными).

Доказательство. Заметим, что система уравнений (4.3) при $x = y$ и $\theta < 1$ имеет единственное решение, которое соответствует трансляционно-инвариантной мере Гиббса, т.к. при $x = y$ имеем уравнение $x = f(x)$, для правой части которого выполняются: $f(0) = \left(\frac{q-m}{\theta+q-m-1} \right)^k > 0$, функция $f(x)$ строго убывает и ограничена при $x > 0$. Докажем, что при условиях теоремы существуют только две $G_k^{(2)}$ – периодические (не трансляционно-инвариантные) меры Гиббса и $x \neq y$. Для этого будем изучать уравнение $f(f(x)) = x$. Так как функция $f(x)$ обратима при $x > 0$, рассмотрим последнее уравнение в виде $f(x) = f^{-1}(x) = g(x)$, где

$$g(x) = f^{-1}(x) = \frac{q-m-(\theta+q-m-1)\sqrt[k]{x}}{m\sqrt[k]{x}-\theta-m+1}.$$

Так как $f(x) > 0$, то $g(x) > 0$, откуда имеем

$$\theta_1 = \left(\frac{\theta + m - 1}{m} \right)^k < x < \left(\frac{q - m}{\theta + q - m - 1} \right)^k = \theta_2.$$

Рассмотрим функцию $h(x) = \ln \frac{f(x)}{g(x)} = \ln f(x) - \ln g(x)$. Изучим решения уравнения $h(x) = 0$. Ясно, что $x = 1$ является решением этого уравнения, т.е. $h(1) = 0$. Пользуясь производными

$$f'(x) = \frac{k(\theta - 1)(\theta + q - 1)f(x)}{[(\theta + m - 1)x + q - m](mx + \theta + q - m - 1)}$$

и

$$g'(x) = \frac{(\theta - 1)(\theta + q - 1)g(x)}{k\sqrt[k]{x^{k-1}}(m\sqrt[k]{x} - \theta - m + 1)[q - m - (\theta + q - m - 1)\sqrt[k]{x}]},$$

будем иметь

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{(\theta - 1)(\theta + q - 1)}{k} \cdot \frac{k^2}{[(\theta + m - 1)x + q - m](mx + \theta + q - m - 1)} -$$

$$- \frac{(\theta - 1)(\theta + q - 1)}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt[k]{x^{k-1}}(m\sqrt[k]{x} - \theta - m + 1)(q - m - (\theta + q - m - 1)\sqrt[k]{x})}.$$

Обозначив $\sqrt[k]{x} = t$, перепишем производную $h'(x)$ следующим образом

$$v(t) = \frac{(\theta - 1)(\theta + q - 1)p(t)}{kt^{k-1}[(\theta + m - 1)t^k + q - m](mt^k + \theta + q - m - 1)(mt - \theta - m + 1)[(\theta + q - m - 1)t - q + m]},$$

где

$$p(t) = m(\theta + m - 1)t^{2k} + k^2m(\theta + q - m - 1)t^{k+1} - (k^2 - 1)(\theta^2 + (q - 2)\theta + 2mq - 2m^2 - q + 1)t^k +$$

$$+ k^2(\theta + m - 1)(q - m)t^{k-1} + (\theta + q - m - 1)(q - m).$$

Заметим, что по теореме Декарта о положительных решениях многочлена $p(t)$ и значит $h'(x)$ имеет не более двух положительных решения.

Легко проверить, что

$$\lim_{x \rightarrow \theta_1} h(x) = -\infty, \quad h(1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \theta_2} h(x) = +\infty.$$

Отсюда, уравнение $h(x) = 0$ имеет по крайней мере одно решение x_0 при $x < 1$ и хотя бы одно решение x_2 при $x > 1$, если $h'(1) < 0$. Из этого условия

$$h'(1) = \frac{(\theta - 1)(\theta + q - 1)}{k} \cdot \left[\frac{k^2}{(\theta + q - 1)^2} - \frac{1}{(\theta - 1)^2} \right] < 0$$

вытекает $\theta < \frac{k-q+1}{k+1} = \bar{\theta}_{cr}$, т.к. $\frac{(\theta-1)(\theta+q-1)}{k} < 0$.

Кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow \theta_1} h'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \theta_2} h'(x) = +\infty$$

при $\theta < \bar{\theta}_{cr}$. Тогда из $h'(1) < 0$ следует, функция $h(x)$ имеет ровно две критические точки ξ_1, ξ_2 : $\theta_1 < \xi_1 < 1$ и $1 < \xi_2 < \theta_2$. Значит, $h(x)$ возрастает при $\theta_1 < x < \xi_1$, $x > \xi_2$ и убывает при $\xi_1 < x < \xi_2$ (Рис.1). Следовательно, уравнение $h(x) = 0$ имеет только три решения $x_0 < x_1 = 1 < x_2$. Осталось проверить условие $x \neq y$. Мы имеем решения

$x_0 < x_1 = 1 < x_2$. Тогда, т.к. функция $f(x)$ строго убывает, из второго уравнения системы (4.3) получим, что $f(x_0) = y_0 > f(x_1) = y_1 = 1 > f(x_2) = y_2$. Итак, для модели Поттса при условиях теоремы существуют только три $G_k^{(2)}$ – периодические меры Гиббса μ_0, μ_1, μ_2 , соответствующие решениям $x_0 < x_1 = 1 < x_2$, соответственно, где мера μ_1 является трансляционно-инвариантной, а меры μ_0, μ_2 являются $G_k^{(2)}$ – периодическими (не трансляционно-инвариантными). Теорема доказана.

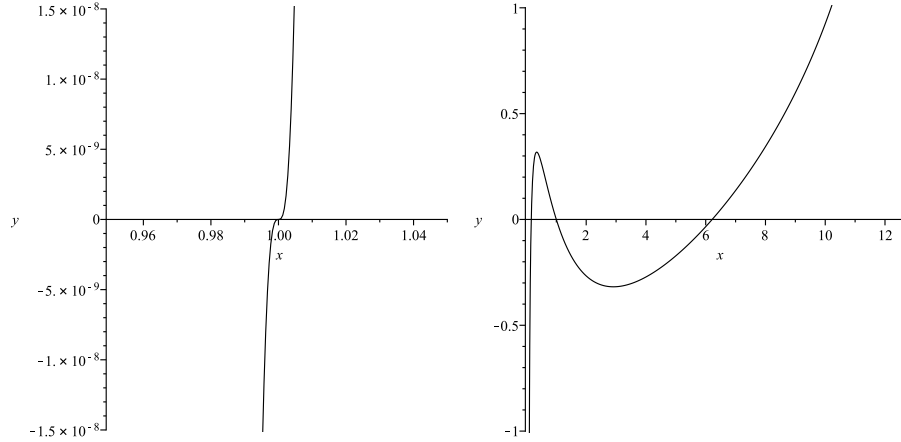


Рис. 1. График функции $h(x)$ при $k = 3$, $q = 3$, $\bar{\theta}_{cr} = 0.25$, $m = 1$ (слева) и при $k = 5$, $q = 4$, $\theta = 0.2$, $m = 2$ (справа).

В силу Теоремы 3 из [10], справедлива следующая

Теорема 4. Для модели Поттса при $k \geq 3$, $3 \leq q < k + 1$ и $0 < \theta < \bar{\theta}_{cr}$ на $\bigcup_{m=1}^q I_m$ существуют ровно

$$2 \cdot (2^q - 1)$$

$G_k^{(2)}$ – периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса.

Благодарности. Авторы выражают глубокую признательность профессору У.А.Розикову за полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Х.-О. Георги. *Гиббсовские меры и фазовые переходы*. - М.: Мир, 1992.
- [2] С. J. Preston. *Gibbs States on Countable Sets*. - Cambridge Tracts Math., 68, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.
- [3] Я. Г. Синай. *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*. - М.: Наука, 1980.
- [4] Н.Н. Ганиходжаев. *ТМФ*, **85**: 2 (1990), 163–175.
- [5] Н.Н. Ганиходжаев. *ДАН РУз*, 6-7 (1992), 4–7.
- [6] U.A. Rozikov. *Gibbs measures on Cayley trees*. World Scientific.-2013.
- [7] N.N. Ganikhodjaev, U.A. Rozikov. *Lett. Math. Phys.* **75**: 2 (2006), 99–1109.
- [8] У.А. Розиков, Р.М. Хакимов. *ТМФ*, **175**: 2 (2013), 300–312.
- [9] Хакимов Р.М. О существовании периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли, *Узбекский математический журнал*, No 3, 2014, 134–142.
- [10] R. M. Khakimov. New periodic Gibbs measures for q -state Potts model on a Cayley tree. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 2014, 7(3), p.297-304.
- [11] C. Külske, U. A. Rozikov, R. M. Khakimov. Description of all translation-invariant (splitting) Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree. *Jour. Stat. Phys.* **156**(1) (2014), 189-200.

- [12] C. Külske, U.A. Rozikov, *Fuzzy transformations and extremality of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree*, arXiv:1403.5775v1 [math-ph].